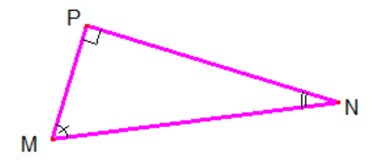
S.14 Autour de LA TRIGONOMETRIE

La trigonométrie est l'étude des relations liant les mesures des angles et des longueurs des côtés dans un **triangle rectangle**.

Mise en route

A. Dans le triangle MNP, rectangle en P, on connaît certaines longueurs de côtés et on cherche certaines mesures d'angles.



Indiquer la ou les relations trigonométriques que l'on peut utiliser pour calculer chaque mesure **le plus directement possible** :

On connaît les mesures des longueurs	On cherche la mesure de l'angle	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3	Réponse 4
MN et MP	$\widehat{NMP}$	Sin $\widehat{M}$	Cos $\widehat{M}$	Tan $\widehat{M}$	impossible
MN et NP	$\widehat{MNP}$	Sin $\widehat{N}$	Cos $\widehat{N}$	Tan $\widehat{N}$	impossible
MP et NP	$\widehat{MNP}$	Sin $\widehat{N}$	Cos $\widehat{N}$	Tan $\widehat{N}$	impossible
MN et NP	$\widehat{NMP}$	Sin $\widehat{M}$	Cos $\widehat{M}$	Tan $\widehat{M}$	impossible
MN et NP	$\widehat{MPN}$	Sin $\widehat{P}$	Cos $\widehat{P}$	Tan $\widehat{P}$	impossible

B. Dans les trois cas ci-dessous, calculer si c'est possible, la longueur du segment [RT]

Fig.1 : Les points R, S, T sont sur le cercle de centre O. [RT] est un diamètre.

Fig.2 : La droite (RT) est tangente au cercle de centre O, de rayon 2cm. La droite (RS) est sécante à ce cercle. Les points T et S sont diamétralement opposés.

Fig.3 : La droite (AS) est la hauteur du triangle ART.

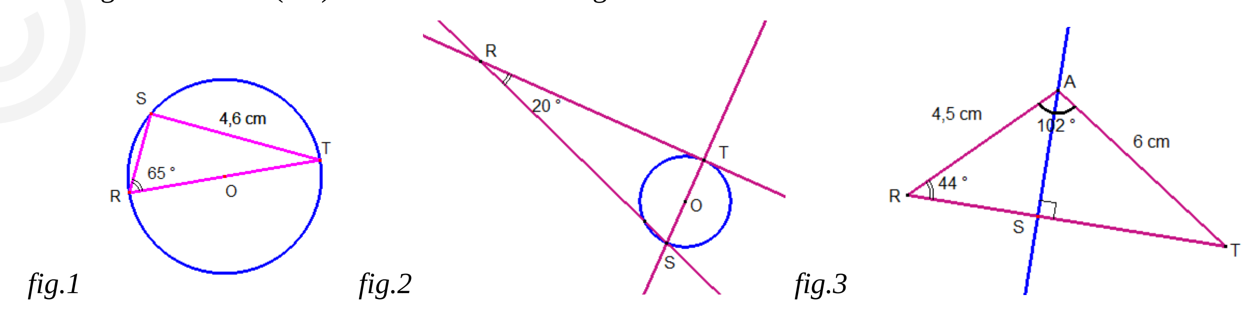


fig.1 *fig.2* *fig.3*

C. Soit un triangle rectangle ABC, d'hypoténuse [AB], tel que $\widehat{ABC}$=50°.

- Donner une valeur approchée au millième près de cos $\widehat{B}$ et sin$\hat{B}$.
- Donner la valeur exacte de $(\cos \widehat{B})^2 + (\sin\hat{B})^2$.

D. Soit un triangle équilatéral ABC, de hauteur AH, de côté *a*. Déterminer et nommer un angle de 60°, ainsi qu'un angle de 30°.

Soit un carré ABCD. Déterminer et nommer un angle de 45°

Compléter le tableau des valeurs particulières ci-dessous, en **valeurs exactes.** Justifier vos réponses en se plaçant dans le triangle ABC ou dans le carré ABCD.

	sin x	*cos x*	*tan x*
60°			
30°			
45°			

E. Construction

Avec uniquement une règle graduée, un compas et une calculatrice, construire un triangle MNP tel que $MN = 4cm$, $\widehat{M} = 55°$ et $\hat{N} = 65°$. On arrondira si nécessaire les mesures de longueurs au dixième près.

Pour s'exercer[1]

Exercice 1

1. On considère un hexagone régulier ABCDEF inscrit dans un cercle de centre O et de rayon *r*

H est le pied de la hauteur issue de O, dans le triangle AOB. Montrer que l'aire de l'hexagone ABCDEF est égale à $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

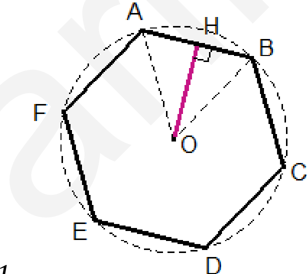


fig.1

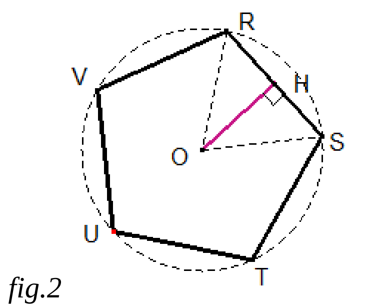


fig.2

2. RSTUV est un pentagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon *r*.

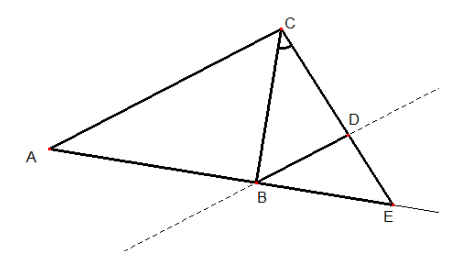
a. H est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle ROS. Déterminer la longueur OH en fonction de *r*.

b. Donner la valeur exacte de l'aire du pentagone RSTUV en fonction de *r*.

[1] D'après G2 2011 - ASIE 2000 – D'après Orléans 1998

Exercice2

On considère la figure ci-dessous :



On donne $AB = 6\ cm$; $AC = 7,5\ cm$; $BC = 4,5\ cm$. *Sur le schéma, les dimensions ne sont pas respectées.*

E est le point de [AB] tel que $AE = 10\ cm$. La parallèle à (AC) passant par B coupe (CE) en D.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2. Calculer la valeur arrondie au degré de la mesure de l'angle $\widehat{BCE}$

3. Déterminer la mesure de la longueur du segment [BD].

Exercice 3

Une unité de longueur est fixée. On constitue un puzzle en découpant un carré ABHF de côté 8, en deux trapèzes rectangles A'EFG et CA'GH et deux triangles rectangles AEC et ABC (*voir figure 1*). Les longueurs FE, GH, CH et A'E sont toutes égales à 5, et les longueurs FG, A'C, AE et BC sont égales à 3.

On assemble les pièces de manière à ce que le contour AEQN forme un rectangle (*voir figure 2*).

1. Déterminer la mesure des longueurs AN et NQ.
Calculer alors les aires du carré ABHF et du rectangle AEQN.
Ce puzzle permet-il de démontrer que, dans ce cas, 64 =65 ?

fig.1

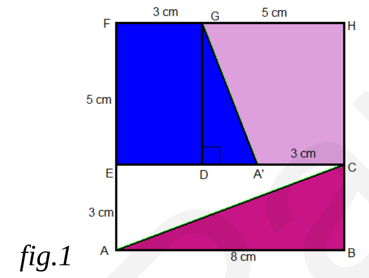


fig.2

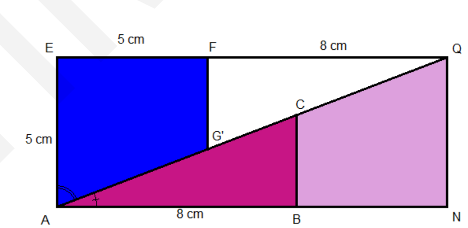
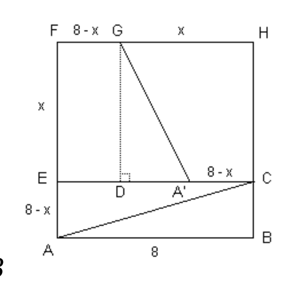


fig.3



2. a. En se plaçant dans le triangle rectangle ABC de la figure 1, calculer tan $\widehat{BAC}$

On trace la droite perpendiculaire au segment [EC] passant par G. Elle coupe ce segment au point D. Calculer tan$\widehat{DA'G}$.

Donner des valeurs décimales approchées des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EA'G}$ au demi degré près.

b. En déduire pourquoi le rectangle AEQN n'est pas entièrement recouvert par les pièces du puzzle.

3. On se propose de réaliser un découpage qui permette de recouvrir entièrement le rectangle AEQN.

Pour cela on fait varier les emplacements des points E, G, A' (*voir figure 3*). On pose $FE = x$ *avec* $0 < x < 8$.

On a alors les égalités : $CH = GH = A'E = x$ et $FG = A'C = AE = BC = 8 - x$

a. Calculer, en fonction de x, $\tan\widehat{ACB}$ et $\tan\widehat{DA'G}$.

On admettra, pour la suite de la question, que deux angles aigus ayant la même tangente sont égaux.

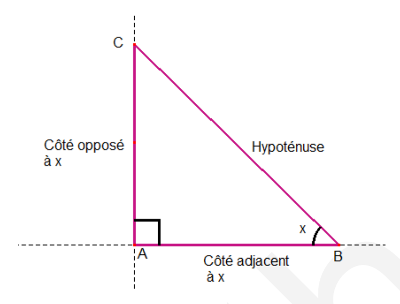
b. En déduire que le découpage convient si $x^2+8x=64$. Interpréter cette égalité en termes d'égalité d'aires.

4a. Développer $(x+4)^2$. En déduire que $x^2+8x=64$ si et seulement si $x+4=4\sqrt{5}$ ou $x+4=-4\sqrt{5}$

b. Montrer qu'il n'y a qu'une seule valeur possible de x pour pouvoir construire le puzzle.

☞ **A retenir**

DANS UN TRIANGLE RECTANGLE, on peut définir des relations entre les angles aigus et les longueurs des côtés.



$$Sin\ x = \frac{longueur\ du\ côté\ Opposé\ à\ x}{longueur\ de\ l'Hypoténuse} \qquad Cos\ x = \frac{longueur\ du\ côté\ Adjacent\ à\ x}{longueur\ de\ l'\ Hypoténuse}$$

$$Tan\ x = \frac{longueur\ du\ côté\ Opposé\ à\ x}{longueur\ du\ côté\ Adjacent\ à\ x}$$

On pourra s'aider d'un moyen mnémotechnique pour les retenir : le traditionnel SOH-CAH-TOA ou le favori de certains élèves CAH-SOH-TOA [2], dont chaque lettre est présente dans les formules.

- Le sinus et le cosinus d'un angle sont toujours inférieurs à 1 puisque l'hypoténuse, présente au dénominateur des rapports, est le plus grand côté.
- Par contre, la tangente d'un angle aigu peut prendre toutes les valeurs.
- Pour deux angles aigus complémentaires (somme égale à 90°), le sinus de l'un est égale au cosinus de l'autre. Par exemple, $\sin 25° = \cos 65°$ *et* $\cos 25° = \sin 65°$

Deux formules à connaître

Pour tout $0 \leq x < 90°$ les égalités suivantes sont toujours vraies : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\tan x = \dfrac{\sin\ x}{\cos\ x}$

Elles permettent de trouver la valeur exacte d'une relation trigonométrique connaissant la ou les deux autres.

Utilisation de la calculatrice

- Calcul des valeurs de sinus, cosinus ou tangente d'un angle aigu donné…

Par exemple, pour le sinus d'un angle de 35°

Selon la calculatrice, on entre [sin] [35] ou [35] [sin]…l'affichage donne 0,573576436 soit $\sin 35° \approx 0{,}574$

En général on arrondit au millième les valeurs données par la calculatrice.

[2] Lire « *casse-toi* »

· Calcul d'un angle aigu connaissant la valeur de son sinus, son cosinus ou sa tangente

Par exemple, pour trouver l'angle $\widehat{A}$ tel que cos Â = 0,15

Là encore, on entre [cos^{-1}] [0,15] ou [shift cos] [0,15] …l'affichage donne 81,37307344 soit Â $\approx 81°$

En général on arrondit l'angle au degré ou au demi degré le plus proche.

☞ UN BON CONSEIL…

· Avant de commencer un exercice sur les angles nécessitant l'utilisation de la calculatrice, penser à vérifier que la machine est en « mode DEGRE ». Pour cela, il faut vérifier qu'un sigle « D » ou « DEG » figure quelque part sur l'écran.

Dans le cas où figurerait à l'écran le sigle « G » ou « GRA » signifiant Grade, ou « R » ou « RAD », signifiant Radian, deux autres unités d'angles, lire attentivement le mode d'emploi pour savoir comment revenir en « mode DEGRE ».

↘SUR LE CERCLE TRIGONOMETRIQUE

Dans le plan, on définit un repère orthonormé (O, I, J), c'est-à-dire un repère comportant des axes perpendiculaires en O sur lesquels on choisit la même unité de graduation $OI = OJ = 1$. On définit un sens d'orientation, le sens positif (direct) étant par convention le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Le cercle de centre O de rayon 1, orienté positivement est le cercle trigonométrique, le sens d'orientation étant le sens trigonométrique. La longueur de ce cercle est alors égale à $l = 2 \times \pi \times r = 2\pi$.

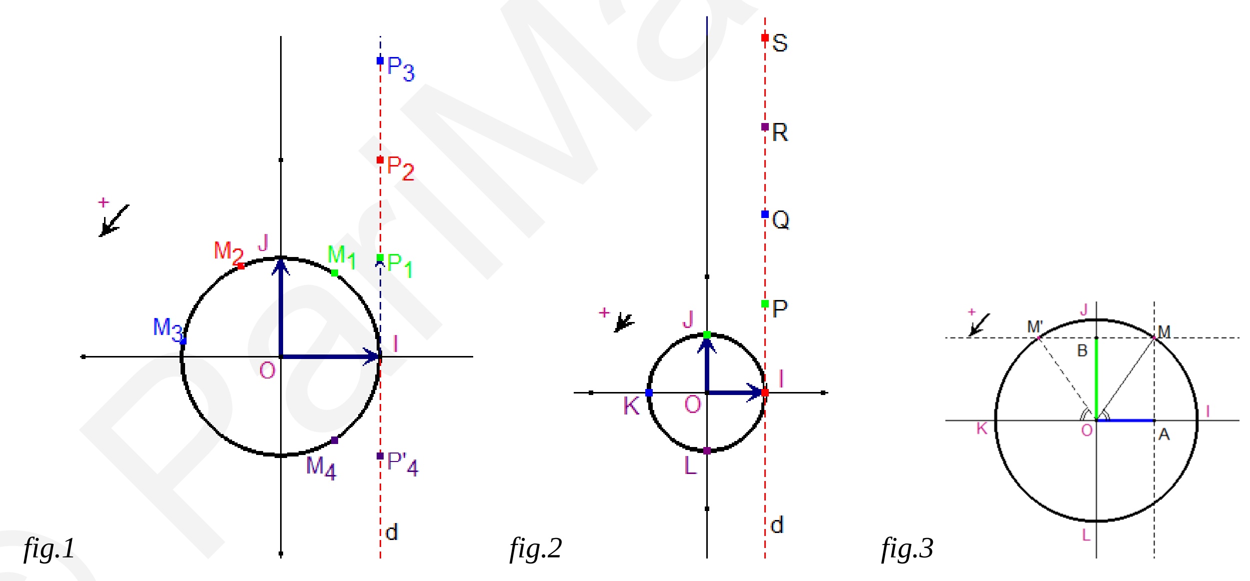


fig.1 *fig.2* *fig.3*

La figure 1 illustre l'enroulement de la droite graduée *d*, représentant la droite des Réels, sur le cercle trigonométrique. A chaque point de cette droite, qui peut se repérer par sa graduation dans le repère (I, P_1), on associe un point du cercle : ainsi P_1 (d'abscisse 1) vient en M_1, P_2 (d'abscisse 2) en M_2, P_3 (d'abscisse 3) en M_3…. La longueur de chaque arc respectif est alors $l_{\overset{\frown}{IM_1}} = 1$, $l_{\overset{\frown}{IM_2}} = 2$, $l_{\overset{\frown}{IM_3}} = 3$.

Un point particulier de la droite *d* se positionne alors en I dans l'enroulement. L'arc qui lui est associé a pour longueur la circonférence du cercle, l'abscisse exacte de ce point sur *d* est donc égale à 2π .

Le point M_4 du cercle correspond à un point P_4 dans l'enroulement direct, mais on peut aussi considérer que, dans un enroulement *dans le sens indirect*, il correspond au point P'_4 d'abscisse -1 sur la droite *d*. On codera négativement cet enroulement.

La droite *d* étant illimitée, on imagine aisément que l'enroulement se poursuive et que d'autres tours associent de nouveaux points de *d*, donc de nouveaux réels à chaque point M. Ainsi à chaque tour nouveau, la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ augmente de 2π

La figure 2 montre que certains points remarquables du cercle sont associés à des réels dont la valeur exacte est donnée en fonction de π . Ainsi les points P, Q, R se positionnent en J, K, L dans l'enroulement et les longueurs des arcs $\widehat{IJ}$, $\widehat{IK}$, $\widehat{IL}$ sont alors respectivement $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Le point S se positionne en I dans l'enroulement direct, son abscisse sur *d* est 2π

Sur la figure 3, dans le repère (0, I, J), le point M du cercle trigonométrique est repéré par son abscisse OA et son ordonnée OB. Le triangle OMA étant rectangle, la longueur de son hypoténuse OM étant égale à 1, on remarque que $\cos\widehat{MOA} = \frac{OA}{OM} = OA$ et $\sin\widehat{MOA} = \frac{MA}{OM} = \frac{OB}{OM} = OB$

On retrouve alors certaines valeurs particulières. Ainsi si M est en I, $\cos 0° = 1$ *et* $\sin 0° = 0$; si M est en J, $\cos 90° = 0$ *et* $\sin 90° = 1$; si M est en K, $\cos 180° = -1$ *et* $\sin 180° = 0$

On peut remarquer sur le cercle que, pour deux angles supplémentaires (comme $\widehat{MOA}$ et $\widehat{M'OA}$ dont la somme est égale à 180°), les cosinus sont opposés et les sinus égaux.

Ainsi $\sin 50° = \sin 130°$ *et* $\cos 130° = -\cos 50°$

➘ Longueur d'un arc de cercle connaissant la mesure de l'angle au centre

Sur un cercle de rayon *r*, on appelle radian la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur égale au rayon. Pour un cercle de rayon 1, la circonférence a une longueur égale à 2π . Ce cercle complet représente l'arc intercepté par un angle au centre de 360°, soit 2π radians. Certaines valeurs particulières sont alors définies sur le cercle. $\widehat{IOJ} = 90° = \frac{\pi}{2} rad$ $\widehat{IOK} = 180° = \pi rad$ $\widehat{IOL} = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} rad$

La longueur *l* d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure α de l'angle au centre qui l'intercepte. $l = \frac{2\pi \times \alpha}{360}$, avec α la mesure en degré de l'angle.

